КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АЛЬ-ФАРАБИ

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ТЕПЛОФИЗИКИ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

3D моделирование физических процессов

Методы исследования конечно-разностных схем на устойчивость

Лектор: PhD
Максимов Валерий Юрьевич

Вопросы:

1. Как находят ошибку аппроксимации?
2. Какая КРС называется аппроксимирующей?
3. Какая КРС называется сходящейся?
4. Из-за чего возникает неустойчивость?
5. Напишите число Куранта.
6. Напишите диффузионное число.
7. Напишите условие устойчивости КРС.

МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Идея метода дискретных возмущений состоит в том, что в уравнение *в каждую точку поочередно* вводится дискретное возмущение ε и прослеживается влияние этого возмущения на следующих временных слоях.

Конечно-разностная схема будет устойчивой, если возмущение не возрастает

Рассмотрим конечно-разностное уравнение :

$$f_i^{n+1} = f_i^n - \frac{C}{2}\left(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n\right) + d\left[f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n\right] \qquad \textbf{(1)}$$

Введем возмущение ε в точку (i,n):

$$f_i^{n+1} + \varepsilon^{n+1} = \left(f_i^n + \varepsilon^n\right) - \frac{C}{2}\left(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n\right) + d\left[f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2\left(f_i^n + \varepsilon^n\right)\right] \qquad \textbf{(2)}$$

Вычтя из уравнения с возмущением (2) «невозмущенное» уравнение (1), получим уравнение для возмущений:

$$\varepsilon^{n+1} = \varepsilon^n - 2d\varepsilon^n$$

Отсюда:

$$\boxed{\left|\frac{\varepsilon^{n+1}}{\varepsilon^n}\right| = \left|1 - 2d\right| \le 1} \qquad \textbf{(3)}$$

Необходимо разрешить полученное неравенство относительно d:

$$-1 \le 1-2d \le 1.$$

Рассмотрим отдельно правую и левую части этого неравенства:

а) $1-2d \le 1 \quad d \ge 0$

это условие выполняется всегда

б) $-1 \le 1-2d \quad d \le 1$

КРС (1) устойчива при выполнении этого условия

- Во избежание осцилляций должно выполняться условие:

$$\frac{\varepsilon^{n+1}}{\varepsilon^{n}} \geq 0 \Rightarrow$$

1-2d≥0 → d≤1/2 - более жесткое ограничение, чем в б), которое включает в себя условие $d \leq 1$

При фиксированных Δx и α это условие накладывает ограничение на шаг по времени:

$$\boxed{\Delta t \leq \frac{1}{2}\frac{\Delta x^2}{a}}$$

Введем теперь возмущение ε в точку $(i+1,n)$:

$$f_i^{n+1} + \varepsilon^{n+1} = f_i^n - \frac{C}{2}\left(f_{i+1}^n + \varepsilon^n - f_{i-1}^n\right) + d\left(f_{i+1}^n + \varepsilon^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n\right) \qquad \textbf{(4)}$$

Вычтя из уравнения с возмущением (4) «невозмущенное» уравнение (1), получим новое уравнение для возмущений:

$$\varepsilon^{n+1} = -\frac{C}{2}\varepsilon^n + d\varepsilon^n$$

Отсюда условие устойчивости имеет вид:

$$\boxed{a)\ -1 \le -\frac{c}{2} + d \le 1;}$$

$$-\frac{c}{2} + d \le 1 \Rightarrow \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{u\Delta t}{2\Delta x} \le 1$$

$$\boxed{\Delta t \le \frac{1}{\dfrac{a}{\Delta x^2} - \dfrac{u}{2\Delta x}}}$$

Получили еще одно условие устойчивости, которое выполняется только в том случае, если:

$$\frac{a}{\Delta x^2} - \frac{u}{2\Delta x} > 0$$ т.к. шаг по времени не может быть отрицательным

$$\Rightarrow \frac{u\Delta x}{a} < 2$$ Т.к. $$\Rightarrow \boxed{Pe_c = \frac{u\Delta x}{a}} \Rightarrow Pe_c < 2$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Delta x \le \frac{2a}{u}} \rightarrow$$

Это очень жесткое условие, т. к. с интенсификацией процессов тепломассопереноса скорость, как правило, возрастает, следовательно, Δx должен быть уменьшен, а это, в свою очередь, требует уменьшения Δt, что ведет к возрастанию затрат компьютерного времени

$$б)\ \boxed{-1 \le -\frac{c}{2} + d} \quad \text{или} \quad \boxed{\Delta t\left(\frac{a}{\Delta x^2} - \frac{u}{2\Delta x}\right) \ge -1}$$

Поскольку $\dfrac{a}{\Delta x^2} > \dfrac{u}{2\Delta x}$, то это неравенство выполняется всегда

Проведя аналогичный анализ для точки (*i-1*,*n*), получим:

$$\varepsilon^{n+1} = \frac{C}{2}\varepsilon^n + d\varepsilon^n \Rightarrow -1 \le \frac{c}{2} + d \le 1$$

Таким образом, метод дискретных возмущений для уравнения (1) дает три следующих условия:

$$\boxed{\begin{array}{l} a)\, d \le \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \Delta t \le \dfrac{\Delta x^2}{2a}; \qquad б)\, Pe_c \le 2 \Leftrightarrow \Delta x \le \dfrac{2a}{u}; \\ в)\, \Delta t \le \dfrac{1}{\dfrac{a}{\Delta x^2} + \dfrac{u}{2\Delta x}}; \end{array}} \Rightarrow \boxed{г)\, \frac{u\Delta t}{\Delta x} < 1 \Leftrightarrow C < 1}$$